МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(государственный университет)

МЕЖВУЗОВСКИЙ ЦЕНТР ВОСПИТАНИЯ И РАЗВИТИЯ ТАЛАНТЛИВОЙ МОЛОДЕЖИ В ОБЛАСТИ ЕСТЕСТВЕННО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК «ФИЗТЕХ-ЦЕНТР»

Методические указание к решению Конкурса 68 по показательным и логарифмическим неравенствам.

СБОРНИК МЕТОДИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ

Москва 2012

Предисловие

Межвузовский «Физтех-центр» МФТИ ежегодно проводит несколько конкурсов абитуриентов по решению задач вступительных испытаний МФТИ разных лет. Результаты вступительных испытаний в МФТИ 2012 года показали, что отдельные абитуриенты плохо подготовлены по тригонометрии, планиметрии и решению неравенств с показательными функциями и логарифмами. Потому решено изменить формат наших конкурсов. В 2012 будет предложено четыре специализированных конкурса: три по указанным разделам математики и один по физике.

Мы надеемся, что эта «шпаргалка» поможет вам при решении задач Конкурса и не только их.

Оргкомитет физико-математических олимпиад МФТИ

ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ (ЭКСПОНЕНТЫ)

Функция a^x **определена при** $a > 0$, а при $a = 1$, $a^x = 1^x = 1$, и при этом выполняются следующие свойства монотонности

$a > 1,\ b > 1, b > a$	$a, b \in (0,1), b > a$
a^x – монотонно возрастает	a^x – монотонно убывает
При $x > 0$ имеем $a^x > a^0 = 1$	При $x > 0$ имеем $a^x < a^0 = 1$
При $x < 0$ имеем $a^x < a^0 = 1$	При $x < 0$ имеем $a^x > a^0 = 1$
При $x > 0$ имеем $b^x > a^x$	При $x > 0$ имеем $b^x < a^x$
При $x < 0$ имеем $b^x < a^x$	При $x < 0$ имеем $b^x > a^x$

Отметим формулы справедливые **при** $a > 0,\ b > 0$**:**

$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$, $a^{x-y} = a^x : a^y$, $a^0 = a^{x-x} = a^x : a^x = 1$, $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$,

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x} = a^x \cdot b^{-x}$, $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$.

Нарисуем графики:

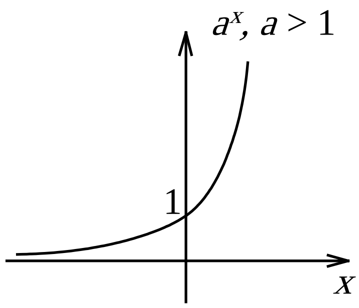

Рис. 1

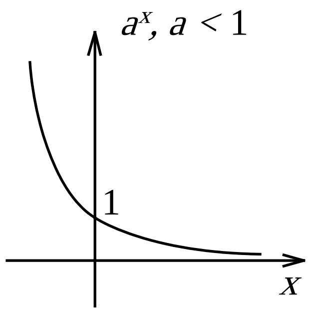

Рис. 2

Обратная функция к функции a^x называется логарифмической функцией и обозначается так: $\log_a x$. Для монотонно убывающих и монотонно возрастающих функций обратные функции существуют и соответственно монотонно убывают и монотонно возрастают. Их графики можно получить из графиков исходных функций зеркальным отражением относительно прямой $y = x$.

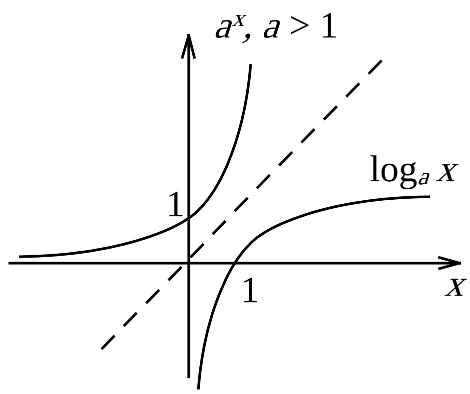

Рис. 3

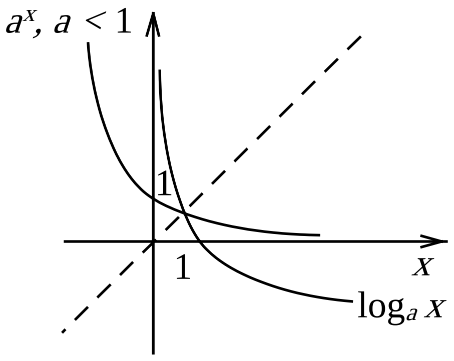

Рис. 4

Нарисуем графики логарифмов на отдельном рисунке:

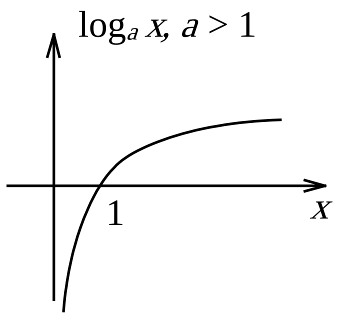

Рис. 5

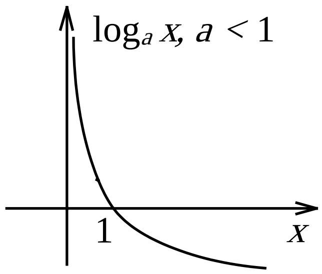

Рис. 6

Из определения обратной функции имеем основное логарифмическое тождество:

$a^{\log_a x} = x$, **при этом должно выполняться** $x > 0$, т.к. $a^b > 0$.

Кроме этого из формул для экспонент получим, (**заметим при этом, что** $a > 0$ **и** $a \neq 1$, **при** $a = 1$ **логарифмическая функция не определена**):

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y, \quad \log_a x + \log_a y = \log_a (x \cdot y),$$

$$a^{x-y} = a^x : a^y, \quad \log_a x - \log_a y = \log_a (x : y),$$

$$a^0 = 1, \quad \log_a 1 = 0.$$

Отметим еще несколько полезных формул

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, \quad a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0,\ b > 0,\ b \neq 1, \text{ в частности}$$

$$\log_a x = \frac{1}{\log_x b}, \quad x > 0,\ x \neq 1,\ a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ b \neq 1,$$

$\log_a x \cdot \log_x b = \dfrac{\log_x b}{\log_x a} = \log_a b -$ формула простая для запоминания $\log_a \cancel{x} \cdot \log_{\cancel{x}} b = \log_a b$, при этом не надо забывать про ОДЗ $x > 0,\ x \neq 1,\ a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0$.

$\log_{a^n} b^k = \dfrac{k}{n} \log_a b$, $a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0$.

ОДЗ ЛОГАРИФМА $D(\log_a x) = \{x > 0,\ a > 0,\ a \neq 1\}$.

Поэтому в формулах
$\log_a x + \log_a y = \log_a (x \cdot y)$,
$\log_a x - \log_a y = \log_a (x : y)$
ОДЗ левой части $\{x > 0,\ y > 0,\ a > 0,\ a \neq 1\}$ **уже, чем ОДЗ правой части** $\left\{\left[\begin{array}{l} x > 0,\ y > 0 \\ x < 0,\ y < 0 \end{array}\right.,\ a > 0,\ a \neq 1\right\}$.
А в формулах, записанных в обратном порядке
$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$,
$\log_a (x : y) = \log_a x - \log_a y$,
ОДЗ левой части $\left\{\left[\begin{array}{l} x > 0,\ y > 0 \\ x < 0,\ y < 0 \end{array}\right.,\ a > 0,\ a \neq 1\right\}$ **шире ОДЗ правой части** $\{x > 0,\ y > 0,\ a > 0,\ a \neq 1\}$.

Отметим, что все формулы для логарифмических функций справедливы на области определения этой функции, иногда в формуле происходит уменьшение ОДЗ, чтобы не сделать ошибки подобные формулы при уменьшении ОДЗ можно переписать следующим образом:

$\log_{a^n} b^k = \dfrac{k}{n} \log_{|a|} |b|$, $a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0$.
$\log_a (x \cdot y) = \log_a |x| + \log_a |y|$,
$\log_a (x : y) = \log_a |x| - \log_a |y|$,

Потенциальные и логарифмические неравенства.

Если $a > 1$, то при $x > y$ получим $a^x > a^y$.

Если $0 < a < 1$, то при $y > x$ имеем $a^x > a^y$.

Таким образом, при $a > 0$ получим, что неравенство $a^x > a^y$ эквивалентно неравенству $(a-1)(x-y) > 0$.

Поэтому решение неравенства $(f(x))^{g(x)} > (f(x))^{h(x)}$ **следует начинать с ОДЗ функций** $f(x)$, $h(x)$, $g(x)$**, затем ОДЗ показательной функции** $f(x) > 0$**,** и

записать совокупность систем неравенств на ОДЗ:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0 < f(x) < 1,\\ g(x) < h(x),\end{cases}\\ \begin{cases}f(x) > 1,\\ g(x) > h(x)\end{cases}\end{array}\right.$$

эту совокупность систем можно переписать в виде одного неравенства на ОДЗ:

$(f(x)-1)\cdot(g(x)-h(x)) > 0$.

Если неравенство нестрогое $(f(x))^{g(x)} \geq (f(x))^{h(x)}$**, то неравенства на ОДЗ имеем:**

$(f(x)-1)\cdot(g(x)-h(x)) \geq 0$.

Здесь важно не потерять решение $f(x) = 1$**.**

Рассмотрим логарифмическое неравенство

$$\log_{f(x)} g(x) > \log_{f(x)} h(x)$$

Начать решение надо с ОДЗ функций, входящих в неравенство:

$$\begin{cases}f(x) > 0,\\ f(x) \neq 1,\\ g(x) > 0,\\ h(x) > 0.\end{cases}$$

т.к. свойства монотонности для логарифмической функции аналогичны свойствам показательной, то к ОДЗ надо добавить неравенство:

$(f(x)-1)\cdot(g(x)-h(x)) > 0.$

Отметим показательное неравенство

$a^c > b^c$.

При

$a \neq 1 \Leftrightarrow\ a^c - a^{c\log_a b} > 0\ \Leftrightarrow\ (a-1)(c - c\log_a b) > 0\ \Leftrightarrow\ (a-1)c(1-\log_a b) > 0\ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ (a-1)^2 c(1-\log_a b)>0 \Leftrightarrow c(a-b)>0$ и при $a=1$ имеем $b^0>b^c$, т.е $(b-1)(-c)>0$ или $c(a-b)>0$. Таким образом исходное неравенство на ОДЗ $(a>0,\ b>0)$ эквивалентно неравенству $c(a-b)>0$.

Отметим логарифмическое неравенство

$$\frac{1}{\log_a b}>\frac{1}{\log_a c}\Leftrightarrow\frac{\log_a c-\log_a b}{\log_a b\cdot\log_a c}>0\Leftrightarrow$$
$$\frac{(a-1)(c-b)}{(a-1)(b-1)\cdot(a-1)(c-1)}>0\Leftrightarrow\frac{(c-b)}{(a-1)(b-1)(c-1)}>0\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (a-1)(b-1)(c-1)(c-b)>0$ **на ОДЗ** $a>0, b>0, a\neq 1, b\neq 1, c\neq 1$**.**

А для нестрого неравенства, соответственно:
$\log_{f(x)} g(x)\geq\log_{f(x)} h(x)$**,**
к ОДЗ добавим неравенство
$(f(x)-1)\cdot(g(x)-h(x))\geq 0$.
Отметим, что случай $f(x)=1$ здесь запрещен ОДЗ.
Рассмотрим так же нестрогое неравенство
$a^c\geq b^c$.
$\Leftrightarrow\ c(a-1)^2(a-b)\geq 0$, т.е. $a=1$ или $c(a-b)\geq 0$.

Примеры решений

1. $x^x>1 \Leftrightarrow x^x>x^0 \Leftrightarrow x>0,\ (x-1)\cdot(x-0)>0 \Leftrightarrow x>1.$

2. $x^x\leq 1 \Leftrightarrow x^x\leq x^0 \Leftrightarrow x>0,\ (x-1)\cdot(x-0)\leq 0 \Leftrightarrow 0<x\leq 1.$

3. $\log_x x>0 \Leftrightarrow \log_x x>\log_x 1 \Leftrightarrow x>0,\ x\neq 1,\ (x-1)\cdot(x-1)>0 \Leftrightarrow$ $x>0,\ x\neq 1.$

4. $\log_x x\leq 0 \Leftrightarrow \log_x x\leq\log_x 1 \Leftrightarrow x>0,\ x\neq 1,\ (x-1)\cdot(x-1)\leq 0 \Leftrightarrow$ $x\in\varnothing$.

5. $(\sin x)^{\cos x}>1 \Leftrightarrow (\sin x)^{\cos x}>(\sin x)^0 \Leftrightarrow \sin x>0,\ (\sin x-1)\cdot\cos x>0$

$\Leftrightarrow\ \sin x>0,\ \sin x\neq 1,\ \cos x<0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2}+2\pi n<x<\pi+2\pi n.$

6. $(\sin x)^{\cos x} \le 1 \Leftrightarrow (\sin x)^{\cos x} \le (\sin x)^0 \Leftrightarrow \sin x > 0$,
$(\sin x - 1)\cdot\cos x \le 0 \Leftrightarrow \sin x = 1$ или $\sin x > 0$, $\cos x \ge 0$
$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \le x \le \frac{\pi}{2} + 2\pi n$. Отметим, что здесь равенство $\sin x = 1$ включается во второе неравенство $\cos x \ge 0$.

7. $\log_{|x|-1} x^2 < 0 \Leftrightarrow |x| > 1,\ x \ne \pm 2,\ x \ne 0,\ (|x|-2)(x^2-1) < 0 \Leftrightarrow$
$|x| > 1,\quad |x| < 2 \Leftrightarrow x \in (-2,-1) \cup (1,2)$.

8. $\begin{cases} \log_2(x^2-3x+3) > 1 \\ \log_{x-1}(x^2-4x+4) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-3x+3 > 0,\ x^2-3x+3 > 2,\ x > 1,\ x \ne 2,$
$(x-2)\left(x^2-4x+4-1\right) < 0$

$\Leftrightarrow x^2-3x+1 > 0,\ x > 1,\ (x-2)(x-3)(x-1) < 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x - \frac{3+\sqrt{5}}{2})(x - \frac{3-\sqrt{5}}{2}) > 0,\ (x-2)(x-3) < 0, \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x > \frac{3+\sqrt{5}}{2},\ 2 < x < 3$ или $x < \frac{3-\sqrt{5}}{2},\ 2 < x < 3 \Leftrightarrow \frac{3+\sqrt{5}}{2} < x < 3$.

9. $\log_2(x+2) + \log_2(1-x) \ge \log_2\left((1-x)(x^2-8x-8)\right) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x > -2,\ x < 1,\ (1-x)(x^2-8x-8) > 0,$
$(x+2)(1-x) \ge (1-x)(x^2-8x-8)$
$\Leftrightarrow x > -2,\ x < 1,\ x^2-8x-8 > 0,\ x+2 \ge x^2-8x-8 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x > -2,\ x < 1,\ (x-4-2\sqrt{6})(x-4+2\sqrt{6}) > 0,\ (x+1)(x-10) \le 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x > -2,\ x < 1,\ x < 4-2\sqrt{6},\ x \ge -1,\ x \le 10 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x < 1,\ x < 4-2\sqrt{6},\ x \ge -1$, отметим, что $4-2\sqrt{6} > -1$, т.к.
$5 > 2\sqrt{6}$, поэтому, продолжая эквивалентности, имеем $-1 \le x < 4-2\sqrt{6}$