МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(государственный университет)

МЕЖВУЗОВСКИЙ ЦЕНТР ВОСПИТАНИЯ И РАЗВИТИЯ ТАЛАНТЛИВОЙ МОЛОДЕЖИ В ОБЛАСТИ ЕСТЕСТВЕННО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК «ФИЗТЕХ-ЦЕНТР»

Методические указание к решению Конкурса 68 по геометрии

СБОРНИК МЕТОДИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ

Москва 2012

Предисловие

На основе анализа приема первокурсников и их текущей успеваемости наши методисты (преподаватели кафедры высшей математики МФТИ), сделали вывод о том, что многие абитуриенты имеют затруднения при решении задач по геометрии. По этой причине мы предлагаем вам ознакомиться с данным пособием и потренироваться в решении геометрических задач.

Умение решать задачи по геометрии поможет улучшить геометрическое «чутье», которое в свою очередь позволит существенно упростить решение задач как по математике, так и по физике. При отсутствии навыков решения геометрических задач возникают проблемы при выполнении домашних заданий по многим дисциплинам.

Мы надеемся, что эта «шпаргалка» поможет вам при решении задач Конкурса и не только их.

Оргкомитет физико-математических олимпиад МФТИ

Некоторые полезные соотношения в треугольнике

Рассмотрим треугольник ABC. Основные обозначения введены на рисунке 1. Мы будем считать известными величины $\angle BAC = \alpha$, $|AB| = c, |AC| = b$, и через эти основные величины вычислим некоторые соотношения в треугольнике.

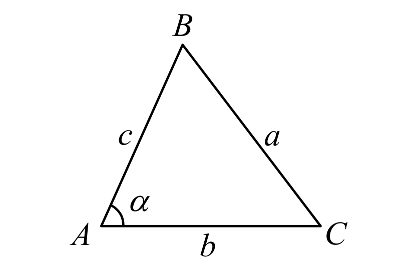

Рис. 1

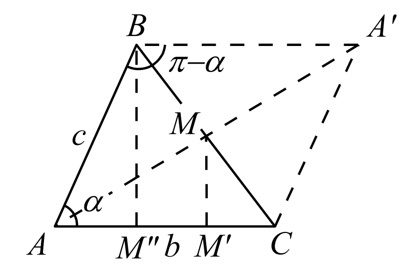

Рис. 2

Обозначим $S = \dfrac{a \cdot h}{2} = \dfrac{b \cdot c \cdot \sin\alpha}{2} = r \cdot p = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ – площадь треугольника ABC, r, R – радиусы вписанной и описанной окружностей, m – длина медианы AM, h – высота треугольника опущенная из вершины A, δ – длина биссектрисы $AБ$, p – полупериметр треугольника.

Теорема косинусов: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.

Теорема синусов: $\dfrac{a}{\sin\alpha} = 2R$.

Длина высоты: $h = \dfrac{2S}{a} = \dfrac{bc\sin\alpha}{a} = \dfrac{bc}{2R}$.

Радиус описанного круга: $R = \dfrac{a}{2\sin\alpha} = \dfrac{abc}{2bc\sin\alpha} = \dfrac{abc}{4S} = \dfrac{bc}{2h}$.

Длина медианы: достроим треугольник ABC до параллелограмма $ABA'C$ как показано на рисунке 2. Тогда по теореме косинусов для треугольника $AA'B$ получим $A'A^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\pi - \alpha) = b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha$, но длина медианы в два раза меньше диагонали AA' параллелограмма $ABA'C$, поэтому

$$m^2 = \frac{b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha}{4}.$$

Радиус вписанного круга: $r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{bc\sin\alpha}{a+b+c}$.

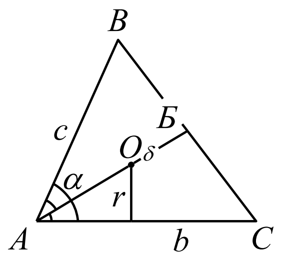

Рис. 3

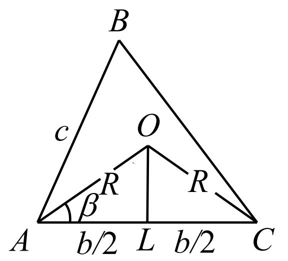

Рис. 4

Расстояние от вершины A до центра O_δ вписанной окружности:

$$AO_\delta = \frac{r}{\sin(\alpha/2)} = \frac{2bc\cos(\alpha/2)}{a+b+c}.$$

Длина биссектрисы: $\delta = \dfrac{2bc\cos(\alpha/2)}{b+c}$.

Докажем эту формулу (см. рис.3).

$S_{ABC} = S_{ABБ} + S_{AБC}$, т.е. $bc\sin\alpha = b\delta\sin(\alpha/2) + c\delta\sin(\alpha/2)$, и следовательно,

$\delta = \dfrac{bc\sin\alpha}{(b+c)\sin(\alpha/2)}$.

В каком отношении центр вписанного круга делит биссектрису $AБ$?

Т.к. $\dfrac{AБ}{AO_\delta} = \dfrac{a+b+c}{b+c} = 1 + \dfrac{a}{b+c}$, но $\dfrac{AБ}{AO_\delta} = \dfrac{AO_\delta + O_\delta Б}{AO_\delta} = 1 + \dfrac{O_\delta Б}{AO_\delta}$.

Таким образом, мы получили:

$$\frac{AO_\delta}{O_\delta Б} = \frac{b+c}{a}.$$

Расстояние OL от центра описанного круга O до стороны AC.

Если угол ABC – прямой, то центр описанного круга лежит на середине гипотенузу и $OL = 0$. Если угол ABC острый, то из рисунка 4 получим $OL = R\sin\beta$, где $\cos\beta = \dfrac{b}{2R}$, и, следовательно,

$OL = R\cdot\sqrt{1-\dfrac{b^2}{4R^2}} = \dfrac{\sqrt{4R^2-b^2}}{2} = \dfrac{\sqrt{\dfrac{a^2}{\sin^2\alpha}-b^2}}{2}$, т.к. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$,

то после тождественных преобразований мы получим

$$OL = \frac{\sqrt{b^2\cos^2\alpha + c^2 - 2bc\cos\alpha}}{2\sin\alpha} = \frac{|b\cos\alpha - c|}{2\sin\alpha},$$

надо рассмотреть еще случай, когда угол ABC тупой. Отметим, что если $\alpha = \pi/2$, то очевидно, что $OL = c/2$, т.к. в этом случае точка O – середина гипотенузы.

Расстояние от вершины A до проекции M' основания медианы M на сторону AC.

Опустим из точки B перпендикуляр BM'' на сторону AC, тогда $AM'' = c\cos\alpha$ (здесь мы рассмотрим случай, когда угол α острый, если этот угол тупой следует рассмотреть еще два случая, когда M' лежит или на стороне AC или вне ее). $CM'' = b - c\cos\alpha$ и $CM' = \dfrac{b - c\cos\alpha}{2}$, поэтому $AM' = b - \dfrac{b - c\cos\alpha}{2} = \dfrac{b + c\cos\alpha}{2}$.

Если α – тупой, то эту формулу придется уточнить $AM' = \dfrac{|b + c\cos\alpha|}{2}$.

Использование формулы Герона для получения параметров треугольника.

Пусть точка O центр вписанной окружности треугольника ABC. Найдем параметры треугольника, если известны площади треугольников $S_a = S_{OBC}, S_b = S_{OAC}, S_c = S_{OAB}$.

Обозначим $S = S_{ABC} = S_a + S_b + S_c$ и $\dfrac{S_a}{S} = \alpha, \dfrac{S_b}{S} = \beta, \dfrac{S_c}{S} = \gamma$.

Для исследования привлечем формулу Герона площади треугольника

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{\sqrt{S(S-2S_a)(S-2S_b)(S-2S_c)}}{r^2}.$$

Т.е. $r = \sqrt{S}\sqrt[4]{(1-2\alpha)(1-2\beta)(1-2\gamma)}$, $a = \dfrac{2S_a}{r}, b = \dfrac{2S_b}{r}, c = \dfrac{2S_c}{r}$.