МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(государственный университет)

МЕЖВУЗОВСКИЙ ЦЕНТР ВОСПИТАНИЯ И РАЗВИТИЯ ТАЛАНТЛИВОЙ МОЛОДЕЖИ В ОБЛАСТИ ЕСТЕСТВЕННО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК «ФИЗТЕХ-ЦЕНТР»

Методические указание к решению Конкурса 68 по тригонометрии

СБОРНИК МЕТОДИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ

Москва 2012

Предисловие

На основе анализа приема первокурсников и их текущей успеваемости наши методисты (преподаватели кафедры высшей математики МФТИ), сделали вывод о том, что многие абитуриенты слабо владеют аппаратом тригонометрии. По этой причине мы предлагаем вам ознакомиться с данным пособием и потренироваться в решении тригонометрических задач.

Навыки решения задач по элементарной тригонометрии **необходимы** для успешного решения многих задач по общей физике, теоретической механике. Тригонометрия явно показывает связь между алгеброй и геометрией. Многие задачи по математическому анализу и аналитической геометрии требуют понимания этой связи. При отсутствие навыков решения тригонометрических задач возникают проблемы при выполнении домашних заданий по многим дисциплинам.

Мы надеемся, что эта «шпаргалка» поможет вам при решении задач Конкурса и не только их.

Оргкомитет физико-математических олимпиад МФТИ

Мера угла

Градусная мера угла.
Градусом (от латинского gradus — деление шкалы, шаг, ступень) называется одна 360-тая часть окружности и обозначается °. В прямом угле, таким образом, 90°, в развёрнутом — 180°. Деление окружности на 360° придумали вавилоняне — соответственно делению года вавилонском календаре на 360 дней.

Радианная мера угла.
Рассмотрим единичную окружность (окружность с радиусом $R=1$). Длина дуги задает на окружности радианную меру угла. Дуга с длиной равной 1 задает 1 радиан (1 рад) или просто 1. Длина дуги окружности равна 2π. Если взята окружность произвольного радиуса, то радианная мера угла равна отношению длины дуги на длину радиуса окружности.

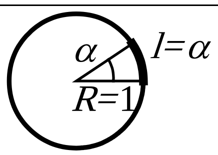

Рис.1

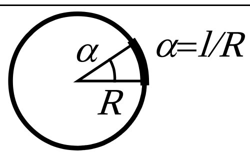

Рис.2

Само определение радианной меры дает формулу для вычисления длины дуги окружности – $l=\alpha\cdot R$.

Пусть в прямоугольном треугольнике a – катет противолежащий углу α, b– катет прилежащий углу α, c – гипотенуза, тогда $\sin\alpha=a/c$, $\cos\alpha=b/c$, $\operatorname{tg}\alpha=a/b$, $\operatorname{ctg}\alpha=\operatorname{tg}\alpha=b/a$. В соответствии с этими определениями вводятся тригонометрические функции.

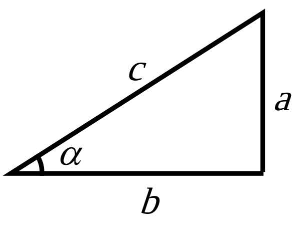

Рис.3

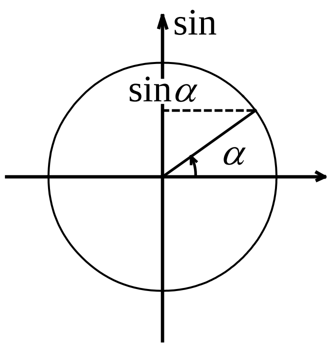

Рис.4

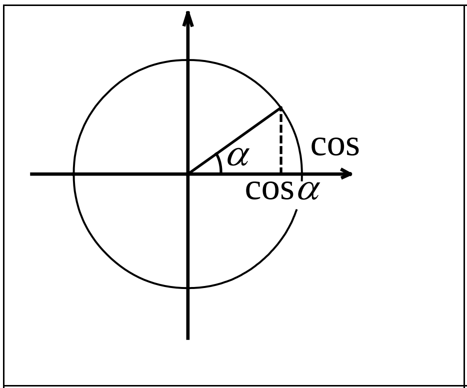

Рис.5

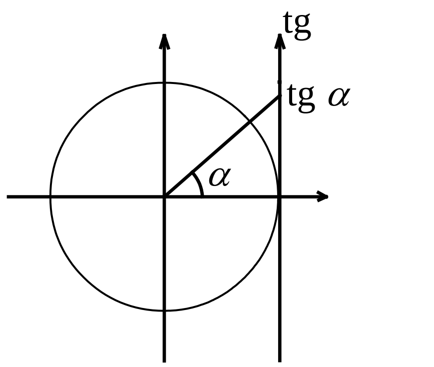

Рис.6

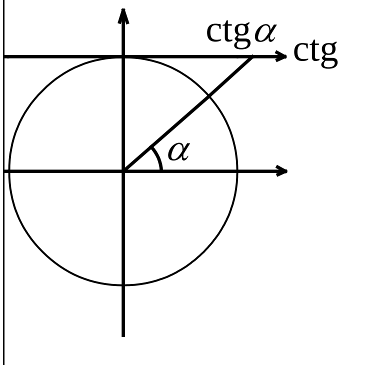

Рис.7

Стрелочка на оси указывает как обычно положительное направление.
Из рисунков–определений функций вытекает очень много следствий.

Правила знаков функций

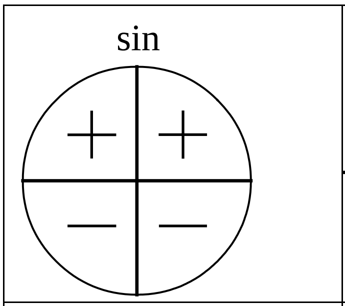

Рис.8

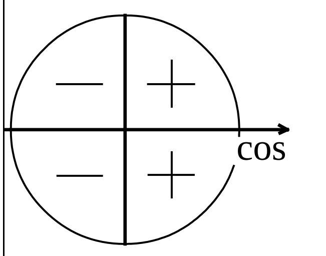

Рис.9

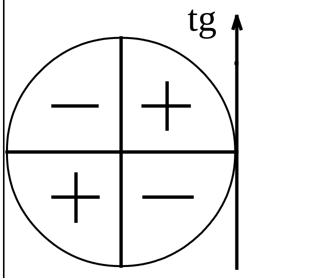

Рис.10

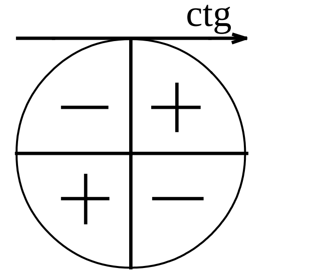

Рис.11

Правила четности функций

$$\sin\alpha = -\sin(-\alpha),\ \cos\alpha = \cos(-\alpha),$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{tg}(-\alpha),\ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\operatorname{ctg}(-\alpha).$$

Правила решения простейших тригонометрических уравнений

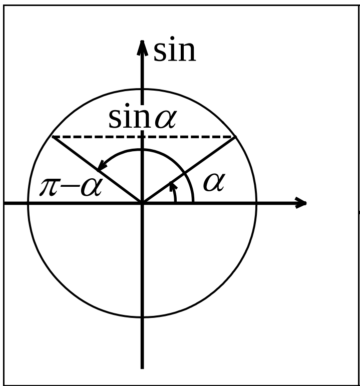

Рис.12

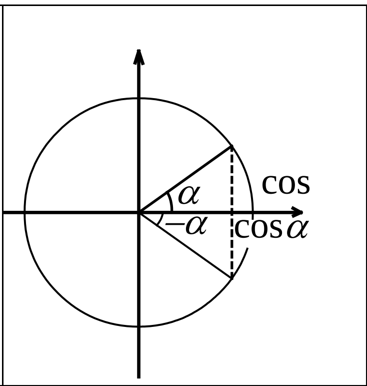

Рис.13

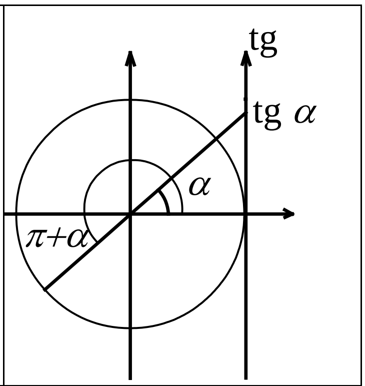

Рис.14

Для функции синуса

$a = \sin\alpha = \sin(\pi - \alpha)$, т.е. $\alpha = \arcsin a + 2\pi n$, $\alpha = \pi - \arcsin a + 2\pi n$,

последние два равенства можно записать как одно $\alpha = (-1)^n \arcsin a + \pi n$. Отметим наиболее часто встречающиеся случаи:

$\sin\alpha = 0$, тогда $\alpha = \pi n$,

$\sin\alpha = 1$, тогда $\alpha = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$,

$\sin\alpha = -1$, тогда $\alpha = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$,

$\sin\alpha = \dfrac{1}{2}$, тогда $\alpha = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n$, $\alpha = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n$, или $\alpha = (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n$.

$\sin\alpha = -\dfrac{1}{2}$, тогда $\alpha = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n$, $\alpha = -\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n$, или $\alpha = (-1)^{n+1} \dfrac{\pi}{6} + \pi n$.

$\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, тогда $\alpha = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi n$, $\alpha = \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n$, или $\alpha = (-1)^n \dfrac{\pi}{4} + \pi n$.

$\sin\alpha = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, тогда $\alpha = -\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n$, $\alpha = -\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n$, или $\alpha = (-1)^{n+1} \dfrac{\pi}{4} + \pi n$.

$\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, тогда $\alpha = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi n$, $\alpha = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n$, или $\alpha = (-1)^n \dfrac{\pi}{3} + \pi n$.

$\sin\alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, тогда $\alpha = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n$, $\alpha = -\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n$, или $\alpha = (-1)^{n+1} \dfrac{\pi}{3} + \pi n$.

Для функции косинуса

$a = \cos\alpha = \cos(-\alpha)$, т.е. $\alpha = \pm\arccos a + 2\pi n$,

$\cos\alpha = 0$, тогда $\alpha = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$,

$\cos\alpha = 1$, тогда $\alpha = 2\pi n$,

$\cos\alpha = -1$, тогда $\alpha = \pi + 2\pi n$,

$\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$, тогда $\alpha = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n$,

$\cos\alpha = -\dfrac{1}{2}$, тогда $\alpha = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n$,

$\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, тогда $\alpha = \pm\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n$,

$\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, тогда $\alpha = \pm\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n$,

$\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, тогда $\alpha = \pm\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n$,

$\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, тогда $\alpha = \pm\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n$.

Для функции тангенса

$a = \operatorname{tg}\alpha$, т.е. $\alpha = \operatorname{arctg} a + \pi n$,

$\operatorname{tg}\alpha = 0$, тогда $\alpha = \pi n$,

$\operatorname{tg}\alpha = 1$, тогда $\alpha = \dfrac{\pi}{4} + \pi n$,

$\operatorname{tg}\alpha = -1$, тогда $\alpha = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n$,

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, тогда $\alpha = \dfrac{\pi}{6} + \pi n$,

$\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, тогда $\alpha = -\dfrac{\pi}{6} + \pi n$,

$\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$, тогда $\alpha = \dfrac{\pi}{3} + \pi n$,

$\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{3}$, тогда $\alpha = -\dfrac{\pi}{3} + \pi n$.

Т.к. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$, то формулы для котангенса легко переписываются из формул для тангенса.

Равенство одноименных функций

$\sin\alpha = \sin\varphi,\ \ \alpha = \varphi + 2\pi n,\quad \alpha = \pi - \varphi + 2\pi n\,.$

Если $\sin\alpha = -\sin\varphi$, то $\sin\alpha = \sin(-\varphi)$
$\cos\alpha = \cos\varphi,\ \ \alpha = \pm\varphi + 2\pi n\,.$

Если $\cos\alpha = -\cos\varphi$, то $\cos\alpha = \cos(\pi + \varphi)$
$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\varphi,\ \ \alpha = \varphi + \pi n$

Если $\operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{tg}\varphi$, $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(-\varphi)$
$\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}\varphi,\ \ \alpha = \varphi + \pi n$

Если $\operatorname{ctg}\alpha = -\operatorname{ctg}\varphi$, $\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}(-\varphi)$

Если $\sin\alpha = \cos\varphi$, то следует заменить последнее равенство на $\sin\alpha = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \varphi\right)$, или $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\varphi\,.$
Если $\sin\alpha = -\cos\varphi$, то следует заменить последнее равенство на $\sin(-\alpha) = \cos\varphi$ и воспользоваться предыдущими рассуждениями.
Если $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\varphi$, то следует заменить последнее равенство на $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} - \varphi\right)$, или $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg}\varphi\,.$

Примеры

Рассмотрим уравнение
$\sin 2x = -\sin 3x$, т.е. $\sin 2x = \sin(-3x)$ и, следовательно, $2x = -3x + 2\pi n$ или $2x = \pi - (-3x) + 2\pi n$, что дает $x = \dfrac{2\pi n}{5}$, или $x = \pi + 2\pi n$. В последнем решении мы n заменили на $(-n)$.

Рассмотрим другое уравнение

$\cos 2x = -\sin 3x$, т.к. $-\sin 3x = \cos\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$, то $\cos 2x = \cos\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$,

т.е. $3x + \frac{\pi}{2} = \pm 2x + 2\pi n$, или $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ и $x = -\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5}$.

Формулы приведения

Для синуса и косинуса

$\sin\alpha = \sin(\alpha + 2\pi) = \sin(\alpha + 2\pi n)$,

$\cos\alpha = \cos(\alpha + 2\pi) = \cos(\alpha + 2\pi n)$,

Для тангенса и котангенса

$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\alpha + \pi) = \operatorname{tg}(\alpha + \pi n)$,

$\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}(\alpha + \pi) = \operatorname{ctg}(\alpha + \pi n)$.

Формулы приведения с числом кратным π

$\sin\alpha = -\sin(\alpha \pm \pi) = -\sin(\alpha \pm \pi + 2\pi n)$, т.е.

$\sin(\alpha + \pi n) = (-1)^n \sin\alpha$,

$\cos\alpha = -\cos(\alpha \pm \pi) = -\cos(\alpha \pm \pi + 2\pi n)$, т.е.

$\cos(\alpha + \pi n) = (-1)^n \cos\alpha$.

Формулы приведения с числом кратным $\frac{\pi}{2}$

Дополнительные углы прямоугольного треугольника α, $\frac{\pi}{2} - \alpha$.

$\sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, $\cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, $\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

Углы α, $\alpha + \frac{\pi}{2}$.

Здесь надо использовать правила знаков для тригонометрических функций. Мысленно помещаем угол α в первую четверть единичного круга и добавляем прямой угол. Мы из первой четверти перемещаемся во вторую. Названия функций при этом заменяются на **ко-**названия и возможно изменение знака соответственно тем которые указаны в правилах на картинках для первой функции:

$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha$, $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\alpha$,

$\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{ctg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{tg}\alpha$.

Углы $\alpha,\ \alpha+\frac{\pi}{2}+\pi n+2\pi k$**.**

$$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}+\pi n+2\pi k\right)=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}+\pi n\right)=(-1)^n\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=(-1)^n\cos\alpha\,,$$

$$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}+\pi n+2\pi k\right)=\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}+\pi n\right)=(-1)^n\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=(-1)^{n+1}\sin\alpha\,,$$

$$\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{2}+\pi n+2\pi k\right)=\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=-\operatorname{ctg}\alpha\,,$$

$$\operatorname{ctg}\left(\alpha+\frac{\pi}{2}+\pi n+2\pi k\right)=\operatorname{ctg}\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=-\operatorname{tg}\alpha\,.$$

Углы $\alpha,\ \alpha-\frac{\pi}{2}$**.**

$$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha\,,\ \cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha\,,$$

$$\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=-\operatorname{ctg}\alpha\,,\ \operatorname{ctg}\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=-\operatorname{tg}\alpha\,.$$

Некоторые стандартные формулы

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,$$

$$\frac{1}{\cos^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=1+\operatorname{tg}^2\alpha\,,$$

$$\frac{1}{\sin^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=1+\operatorname{ctg}^2\alpha\,,$$

$$(\cos\alpha)'=-\sin\alpha,\ \ (\sin\alpha)'=\cos\alpha\,.$$

Быстрое получение формул тригонометрии из одной формулы

За основу возьмем формулу

1. $\sin(x+\alpha)=\sin x\cos\alpha+\cos x\sin\alpha\,,$

2. $\sin(x-\alpha)=\sin x\cos(-\alpha)+\cos x\sin(-\alpha)=\sin x\cos\alpha-\cos x\sin\alpha\,,$

3. Продифференцируем по x формулу (1):

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{d}{dx}\sin(x+\alpha)=\cos(x+\alpha)=\\&\qquad=\frac{d}{dx}\sin x\cos\alpha+\frac{d}{dx}\cos x\sin\alpha=\cos x\cos\alpha-\sin x\sin\alpha,\end{aligned}}$$

т.е. $\cos(x+\alpha)=\cos x\cos\alpha-\sin x\sin\alpha,$

4. Продифференцируем по x формулу (2):
$\cos(x-\alpha)=\cos x\cos\alpha+\sin x\sin\alpha,$

5. $\operatorname{tg}(x+\alpha)=\dfrac{\sin(x+\alpha)}{\cos(x+\alpha)}=\dfrac{\sin x\cos\alpha+\cos x\sin\alpha}{\cos x\cos\alpha-\sin x\sin\alpha}$
разделим числитель и знаменатель последней дроби на $\cos x\cos\alpha$, получим
$\operatorname{tg}(x+\alpha)=\dfrac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}\alpha},$

5. $\operatorname{tg}(x-\alpha)=\dfrac{\sin(x-\alpha)}{\cos(x-\alpha)}=\dfrac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}x\operatorname{tg}\alpha},$

Сложим формулы (1) и (2) получим

6. $2\sin x\cos\alpha=\sin(x+\alpha)+\sin(x-\alpha),$

Сложим формулы (3) и (4) получим

7. $2\cos x\cos\alpha=\cos(x+\alpha)+\cos(x-\alpha)$

Из формулы (4) вычтем формулу (3) получим

8. $2\sin x\sin\alpha=\cos(x-\alpha)-\cos(x+\alpha)$

Сделаем подстановку $x+\alpha=a,\ x-\alpha=b$, т.е. $x=\dfrac{a+b}{2},\ \alpha=\dfrac{a-b}{2}$ в формулах (6-8):

9. $\sin a+\sin b=2\sin\dfrac{a+b}{2}\cdot\cos\dfrac{a-b}{2},$

10. $\sin a-\sin b=\sin a+\sin(-b)=2\sin\dfrac{a-b}{2}\cdot\cos\dfrac{a+b}{2},$

11. $\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cdot\cos\frac{a-b}{2}$,

12. $\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a+b}{2}\cdot\sin\frac{a-b}{2}$.

Формулы кратного аргумента

13. $\sin 2x = \sin(x+x) = \sin x\cos x + \cos x\sin x = 2\sin x\cos x$,

14. $\cos 2x = \cos(x+x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$,

из (14) получим две полезные формулы

15. $1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$,

16. $1 - \cos 2x = 2\sin^2 x$,

17. $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg}(x+x) = \frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$,

18.

$$\begin{aligned}\sin 3x &= \sin(x+2x) = \sin x\cos 2x + \cos x\sin 2x = \\ &= \sin x\cdot(2\cos^2 x - 1) + 2\sin x\cos^2 x = \\ &= \sin x\cdot(4\cos^2 x - 1) = 3\sin x - 4\sin^3 x,\end{aligned}$$

19.

$$\begin{aligned}\cos 3x &= \cos(x+2x) = \cos x\cos 2x - \sin x\sin 2x = \\ &= \cos x\cdot(1 - 2\sin^2 x) - 2\sin^2 x\cos x = \\ &= \cos x\cdot(1 - 4\sin^2 x) = 4\cos^3 x - 3\cos x,\end{aligned}$$

Универсальная тригонометрическая замена (переход к $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$):

20. $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2} = \dfrac{2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$,

21. $\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \dfrac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$,

22. $\operatorname{tg} x = \dfrac{2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}$,

Введение дополнительного угла

$$a\cos\alpha + b\sin\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\cos\alpha + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\sin\alpha\right),$$

т.к. $\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$, то можно положить

$\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\varphi$, $\quad \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\varphi$, тогда

$$a\sin\alpha + b\cos\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\cdot\sin(\alpha+\varphi),$$

или

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\psi, \quad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\psi$$

$$a\cos\alpha + b\sin\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\cdot\cos(\alpha-\psi).$$

В частности

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right).$$

$$\cos\alpha - \sin\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right).$$

$$\sin\alpha + \sqrt{3}\cos\alpha = 2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right) = 2\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right).$$

$$\sin\alpha - \sqrt{3}\cos\alpha = 2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right) = -2\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right).$$

$$\sqrt{3}\sin\alpha + \cos\alpha = 2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right) = 2\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right).$$

$$\cos\alpha - \sqrt{3}\sin\alpha = 2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right) = 2\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right).$$

$$\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\operatorname{ctg}\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right).$$
$$\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\operatorname{ctg}\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right).$$

Полезная подстановка

Если в уравнении присутствуют одновременно $\sin\alpha-\cos\alpha$ и $\sin 2\alpha$, то, т.к. $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha=1-\sin 2\alpha$, полезно иметь в виду подстановку
$\sin\alpha-\cos\alpha=t$, $\sin 2\alpha=1-t^2$.

Если в уравнении присутствуют одновременно $\sin\alpha+\cos\alpha$ и $\sin 2\alpha$, то, т.к. $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha=1+\sin 2\alpha$, полезно иметь в виду подстановку
$\sin\alpha+\cos\alpha=t$, $\sin 2\alpha=t^2-1$.